УДК 530.12:531.51

ГРАВИТАЦИОННЫЙ АНАЛОГ СТАТИСТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

В.В. Ласуков

Томский политехнический университет
E-mail: lav_@list.ru

Исследуется связь между релятивистской термодинамикой ранней Вселенной с метрикой Логунова и гравитационным аналогом статистической механики. Обнаружено, что обратимое во времени уравнение Лиувилля может иметь частное решение с нарушенной симметрией во времени.

Существует мнение, что описание необратимых процессов на языке индивидуальных траекторий и описание на вероятностном языке не являются эквивалентными [1–3]. Для того чтобы вычислить энтропию, рассмотрим с точки зрения релятивистской теории гравитации Логунова связь между термодинамикой и гравитационным аналогом статистической механики. Одновременно это позволит исследовать проблему обратимости эволюции ранней Вселенной.

Гравитационный аналог уравнения Лиувилля

Сначала рассмотрим случай (U_0<0), который при квантовом рассмотрении соответствует дискретному спектру. Гамильтониан гравитационного атома (U_0<0) имеет вид [4]

$$H(a,p_a) = -\frac{p_a^2}{2M_p^2 a} - V|U_0|, \qquad (1)$$

здесь $V = \frac{4\pi a^3}{3}$, a – масштабный фактор метрики Логунова

$$d\sigma^2 = a^6(x^0)(dx^0)^2 - a^2(x^0)\times$$
$$\times[dr^2 + r^2(\sin^2(\vartheta)d\psi^2 + d\vartheta^2)],$$

U_0<0 – постоянная составляющая скалярного поля, $p_a=-M_p^2 aa'$ – сопряженный координате a импульс, $a' \equiv \frac{da}{dt}$, $dt = a^3 dx^0$ – собственное время. При этом переменные $a(x^0)$ и $p_a(x^0)$ изменяются со временем x^0 согласно уравнениям Гамильтона

$$\frac{\partial a}{\partial x^0} = \frac{\partial}{\partial p_a}[\sqrt{g_{00}}\,H]\ ,\quad \frac{\partial p_a}{\partial x^0} = -\frac{\partial}{\partial a}[\sqrt{g_{00}}\,H], \qquad (2)$$

здесь для метрики Логунова $\sqrt{g_{00}} = \left(\frac{a}{a_0}\right)^3$. Из уравнений (2) следует, что эволюция фазовых точек во времени x^0 протекает в соответствии с теоремой Лиувилля.

Для гамильтониана (1) ур. (2) можно представить в виде

$$\frac{\partial a(t)}{\partial t} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial p_a},\quad \frac{\partial p_a(t)}{\partial t} = 2\frac{\partial \tilde{H}}{\partial a}, \qquad (3)$$

здесь $\tilde{H}(a,p_a) = -\frac{p_a^2}{2M_p^2 a} + V|U_0|$.

Ур. (3) сводятся к одному дифференциальному уравнению второго порядка

$$(\frac{a''}{a}) + 2(\frac{a'}{a})^2 + 8\pi G|U_0| = 0, \qquad (4)$$

полученному в работе [5]. Решение этого уравнения имеет вид

$$a = a_0\cos^{1/3}(\nu t)$$

и для такого решения $\left|\sqrt{g_{00}}\,H\right| = |U_0|\frac{4\pi a_0^3}{3}$.

Будем предполагать, что состояние может быть приписано гравитационному атому лишь с некоторой вероятностью, т.е. по аналогии с квантовой теорией будем использовать вероятностную трактовку динамических процессов **одной** частицы, а не ансамбля ее копий. Для этого без использования принципа сокращенного описания [3] введем функцию распределения $\rho(a,p_a,t)$, которая пропорциональна плотности вероятности расположения гравитационного атома в гравитационном фазовом пространстве (a,p_a).

Учитывая уравнения Гамильтона (2) и (3), нетрудно получить космологическое обобщение классического уравнения Лиувилля, описывающего эволюцию плотности $\rho(a,p_a,t)$ в гравитационном фазовом пространстве (a,p_a)

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = \hat{L}\rho - 3\frac{\partial\tilde{H}}{\partial a}\frac{\partial\rho}{\partial p_a}, \qquad (5)$$

где $\hat{L} = \frac{\partial\tilde{H}}{\partial a}\frac{\partial}{\partial p_a} - \frac{\partial\tilde{H}}{\partial p_a}\frac{\partial}{\partial a}$ – оператор Лиувилля эффективного гамильтониана $\tilde{H}$. При этом, как и в классическом случае, функция распределения постоянна вдоль фазовой траектории $\left(\frac{d\rho}{dt} = 0\right)$.

Если функция $\rho(a,p_a,t)$ описывает эволюцию, то в классической теории считается, что обращенная эволюция описывается функцией $\rho(a,-p_a,-t)$. Так как гамильтониан $\tilde{H}$ обладает свойством $\tilde{H}(a,p_a)=\tilde{H}(a,-p_a)$, то функция $\rho(a,-p_a,-t)$ удовлетворяет ур. (5). Поэтому это уравнение инвариантно относительно операции обращения времени ($a\to a, p_a\to -p_a, t\to -t$). Однако, в соответствии со вторым началом термодинамики часто реальные системы не обладают симметрией по отношению к обращению времени, что противоречит обратимости ур. (5) так же как, и других основных уравнений классической и квантовой теории.

Тем не менее, существует связь между обратимой микроскопической динамикой и необратимой макроскопической эволюцией [1–3].

Для гамильтониана (1) решение ур. (5) имеет вид

$$\rho(a,p_a,t)=F\left[\left(\nu t-\operatorname{arctg}\left[\frac{p_a}{H_0 M_p^2 a^2}\right]\right),H_*\right],\quad (6)$$

где $H_0=\sqrt{\frac{8\pi G|U_0|}{3}}$, $H_*=\sqrt{g_{00}}\,H$.

Если предположить, что

$$\rho(a,p_a,t)=\rho(t)\cdot\rho\left(-\operatorname{arctg}\left[\frac{p_a}{H_0 M_p^2 a^2}\right],H_*\right),$$

то тогда

$$\rho(a,p_a,t)=\rho(H_*)\cdot\exp\left[\gamma\left(\nu t-\operatorname{arctg}\left[\frac{p_a}{H_0 M_p^2 a^2}\right]\right)\right],\quad (7)$$

либо

$$\rho(a,p_a,t)=\rho(H_*)+$$
$$+\exp\left[\gamma\left(\nu t-\operatorname{arctg}\left[\frac{p_a}{H_0 M_p^2 a^2}\right]\right)\right],$$
$$\rho(a,p_a,t)=$$
$$=\rho(H_*)\left[1+\exp\left[\gamma\left(\nu t-\operatorname{arctg}\left[\frac{p_a}{H_0 M_p^2 a^2}\right]\right)\right]\right],\quad (8)$$

где произвольная функция гамильтониана $\rho(H_*)$ соответствует равновесному состоянию, $\gamma=-\operatorname{sgn}(t)$, $\operatorname{sgn}(t)=\begin{cases}-1, & t<0\\ 0, & t=0\\ 1, & t>0\end{cases}$; величина γ может быть и константой.

Непосредственной подстановкой нетрудно убедиться, что при $U_0>0$ формальное решение гравитационного аналога уравнения Лиувилля (5) имеет вид

$$\rho(a,p_a,t)=\rho(H_+)+$$
$$+\exp\left[\gamma\left(\nu t+\operatorname{Arth}\left[\frac{p_a}{H_0 M_p^2 a^2}\right]\right)\right],\quad (9)$$

либо

$$\rho(a,p_a,t)=$$
$$=\rho(H_+)\left[1+\exp\left[\gamma\left(\nu t+\operatorname{Arth}\left[\frac{p_a}{H_0 M_p^2 a^2}\right]\right)\right]\right],$$

здесь $H_+=\sqrt{g_{00}}\left[-\frac{p_a^2}{2M_p^2 a}+V|U_0|\right]$.

Нетрудно видеть, что функция (8) и обращенная по отношению к ней функция $\rho(a,-p_a,-t)$ равны и в **фиксированной** точке фазового пространства за время $t>\nu^{-1}$ они стремятся к равновесной функции $\rho(H_*)$ Это означает эквивалентность между прошлым и будущим, и, что время является параметром удаленности от равновесного состояния. Поэтому статистическое описание на основе функции распределения при $\gamma=-\operatorname{sgn}(t)$ включает в себя приближение к равновесному состоянию и обратимость. Если же $\gamma=i$, то решение обратимо, но не описывает приближение к равновесию.

Когда же величина γ является вещественной константой, то тогда $\rho(a,p_a,t)\neq\rho(a,-p_a,-t)$. При этом одна из функций распределения стремится к равновесной функции $\rho(H_*)$, а другая удаляется от нее, так что в этом случае прошлое и будущее различимы. Таким образом, из инвариантности фундаментальных законов относительно обращения времени не следует, что прошлое и будущее играют одинаковую роль.

Будем считать реальным то распределение, которое соответствует равновесному состоянию, достигаемому в будущем (т.е. при $t\to\infty$). Для этого в выражении (8) следует положить $\gamma\equiv-1$. Описание на основе такой функции распределения включает в себя релаксацию к равновесному состоянию и необратимость.

На фазовой же траектории, заданной в параметрическом виде $a=a_0\cos^{1/3}(\nu t)$, $p_a=-M_p^2 aa'$ аргумент функции распределения

$$t-\operatorname{arctg}\left(\frac{p_a}{H_0 M_p^2 a^2}\right)=0,$$

так что в этом случае функция распределения совпадает с равновесной функцией

Таким образом, обратимое во времени уравнение Лиувилля может иметь частное решение с нарушенной симметрией во времени даже для индивидуальной эффективной частицы Планка, обладающей массой $M_p\approx10^{-5}$ г. Замечательно, что необратимость возникает в ситуации с одной степенью свободы. Это опровергает интерпретацию необратимости, согласно которой необратимость – не фундаментальный закон природы, а следствие приближенного макроскопического характера наблюдений.

Однако в обоих случаях при заданных начальных условиях можно с определенностью предсказать будущее, или восстановить прошлое значение функции распределения, а значит и состояние системы, т.е. детерминизм сохраняется. Если же предположить, что начальные данные являются случайными величинами, то можно приспособить классическую и квантовую теорию для описания таких процессов, для которых характерен выбор потенциальных возможностей.

Энтропия ранней Вселенной

Равновесную функцию распределения можно найти из принципа максимума информационной энтропии [3]

$$S_{\inf}(\rho)=-k_b\int\rho(H_*)\ln(\rho(H_*))\sqrt{g_{00}}\,da\,dp_a,$$

при дополнительных условиях

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \sqrt{g_{00}}\, da \int\limits_{-\infty}^{\infty} \rho(H_*) dp_a = 1,$$

$$\left\langle \tilde{H}_* \right\rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sqrt{g_{00}}\, da \int\limits_{-\infty}^{\infty} \tilde{H}_*\, \rho(H_*)\, dp_a,$$

вычисленных на фазовой плоскости. Численный расчет по области, ограниченной фазовой траекторией, совпадает с результатом по фазовой плоскости с точностью порядка единицы. Найдем экстремум функционала

$$\tilde{S}(\rho) = S_{\inf} - \alpha \int \rho(H_*) \sqrt{g_{00}}\; da\, dp_a - \\ - \beta \int H_* \sqrt{g_{00}}\, da\, dp_a$$

с множителями Лагранжа α и β. Приравнивая нулю вариацию функционала, получим

$$\delta \tilde{S} = -\int [\ln(\rho) + \beta H_* + \alpha + 1] \delta\rho \sqrt{g_{00}}\; da\, dp_a = 0.$$

Т.к. $\delta\rho$ произвольна, то экстремальная функция распределения имеет вид канонического распределения Гиббса

$$\rho(H_*) = \exp\left(-\frac{\pi \tilde{H}_*}{2\omega} \right), \tag{10}$$

и для гамильтониана (1) удовлетворяет нормировочному условию $\int\rho(H_*)\sqrt{g_{00}}dadp_a=1$; множитель Лагранжа β выражен через параметр $\frac{\pi}{2\omega} = \beta$, $\pi/2\omega=\beta$, и его можно отождествить с температурой $T = \frac{2\omega}{\pi k_b}$; k_b – постоянная Больцмана; $\tilde{H}_*=-H_*$. Для энтропии из (10) следует выражение

$$S = -k_b \int \rho(H_*) \ln(\rho(H_*)) \sqrt{g_{00}}\, da\, dp_a = \frac{\pi k_b}{2\omega} \left\langle \tilde{H}_* \right\rangle,$$

где для гамильтониана (1) интеграл

$$\left\langle \tilde{H} \right\rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sqrt{g_{00}}\, da \int\limits_{-\infty}^{\infty} \tilde{H}_*\, \rho(H_*)\, dp_a$$

легко вычисляется в аналитическом виде и равен $\left\langle \tilde{H}_* \right\rangle = \frac{2\omega}{\pi}$, так что равновесное значение энтропии каждого отдельного гравитационного атома равно

$$S_{eq} = k_b \tag{11}$$

и для N_0 гравитационных атомов

$$S_{eq} = N_0 k_b. \tag{12}$$

Полагая $k_b T(0) = \frac{2\omega}{\pi} = \frac{3H_0}{2\pi}$ и выбирая $a_0=2H_0^{-1}$, $U_0=\lambda M_p^4$, константу N_0 в равенстве (12), являющуюся аналогом числа Авогадро, умноженного на число молей, можно представить в виде $N_0=1/\lambda$, λ – безразмерная константа самодействия скалярного поля.

Нетрудно видеть, что при $U_0>0$ функция распределения Гиббса (10) нормируема по области, ограниченной фазовой траекторией, а не по всей фазовой плоскости. Эволюция энтропии

$$S(\tau) = -\int\int P \ln\left(P\right) da\, dp_a =$$

$$= -\frac{3\lambda}{\pi} \int\limits_{\frac{1}{\sqrt[3]{\lambda}}}^{\infty} x^3 dx \int\limits_{-\frac{\sqrt{\lambda^2 x^6 - 1}}{\lambda x}}^{\frac{\sqrt{\lambda^2 x^6 - 1}}{\lambda x}} P(x, y, \tau)\; F(x, y, \tau) dy + S_0,$$

где

$$F(x,y,\tau) = \left[\begin{matrix} \ln\left(\frac{1}{2}\left[N1 + N2 \exp\left(\begin{matrix} \gamma(\tau)\tau + \\ + \operatorname{arth}\left(\frac{y}{x^2} \right) \end{matrix} \right) \right] \right) + \\ + \lambda x^3 \left(\frac{y^2}{x} - x^3 \right) \end{matrix} \right],$$

$$P(x,y,\tau) = \frac{1}{2} \exp\left(\lambda x^3 \left[\frac{y^2}{x} - x^3 \right] \right) \times \\ \times \left[N1 + N2 \cdot \exp\left(\gamma(\tau)\tau + \operatorname{arth}\left(\frac{y}{x^2} \right) \right) \right],$$

$$N1 = \frac{1}{\frac{3\lambda}{\pi} \int\limits_{\frac{1}{\sqrt[3]{\lambda}}}^{\infty} x^3\, dx \int\limits_{-\frac{\sqrt{\lambda^2 x^6 - 1}}{\lambda x}}^{\frac{\sqrt{\lambda^2 x^6 - 1}}{\lambda x}} \exp\left[\lambda x^3 \left(\frac{y^2}{x} - x^3 \right) \right] dy},$$

$$N2 = \frac{1}{\frac{3\lambda}{\pi} \int\limits_{\frac{1}{\sqrt[3]{\lambda}}}^{\infty} x^3 dx \int\limits_{-\frac{\sqrt{\lambda^2 x^6 - 1}}{\lambda x}}^{\frac{\sqrt{\lambda^2 x^6 - 1}}{\lambda x}} \exp\left[\lambda x^3 \left(\frac{y^2}{x} - x^3 \right) + \operatorname{arth}\left(\frac{y}{x^2} \right) \right] dy},$$

$$x = \frac{H_0}{2\sqrt[3]{\lambda}} \cdot a,\;\; y =$$

$$= -x^2\, \operatorname{th}(\operatorname{arch}(\lambda x^3)) = -\frac{\sqrt{\lambda^2 x^6 - 1}}{\lambda x},\; S_0 = 0{,}060,$$

соответствующей распределению (9), представлена на рис. 1. Для определенности выбрано значение параметра $\lambda=0{,}01$. Графики построены с помощью компьютерной программы «Mathcad 2001». С помощью этой программы при каждом значении времени τ вычислялся двойной интеграл по переменным a и p_a по области фазового пространства, ограниченной фазовой траекторией.

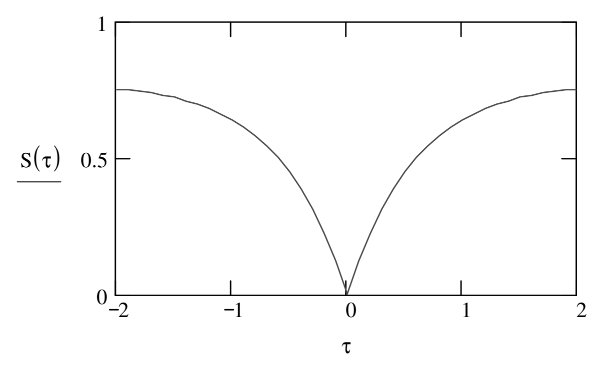


Рис. 1. *Зависимость безразмерной энтропии на одну частицу от времени $\tau=\nu t$ при $\gamma=-sgn(t)$, $U_0>0$*

Отметим, что в этом случае для приближенного описания эволюции энтропии можно использовать удовлетворяющее принципу экстремума информационной энтропии [3] сингулярное решение уравнения (5)

$$\rho = W^{-1}\delta(\tilde{H}_+ - \tilde{E}),$$

где $W=\iint\delta(\tilde{H}_+-\tilde{E})\sqrt{g_{00}}dadp_a$, $\delta(x)$ – дельта-функция. Дело в том, что по аналогии с принципом локального равновесия в пространстве [6] естественно предположить, что в каждый момент времени существует состояние равновесия. Проведенное выше рассмотрение показывает, что в произвольный, но фиксированный момент времени t объем $V=\dfrac{4\pi a^3}{3}$, число частиц $N_0=\dfrac{4\pi a_0^3 U_0}{3\,k_b T(0)}$ и энергия $\tilde{E}$ являются заданными параметрами. Поэтому в каждый момент времени энтропию можно определить по формуле Больцмана

$$S(\tilde{E},N,V)=\ln(W(\tilde{E},N,V)),$$

где $W=\iint\delta(\tilde{H}_+-\tilde{E})\sqrt{g_{00}}dadp_a$ – статистический вес, задающий число динамических состояний внутри слоя, определяемого неравенствами $\tilde{E}\le\tilde{H}_+\le\tilde{E}+\Delta\tilde{E}$; $\tilde{H}_+=-\sqrt{g_{00}}\left[-\dfrac{p_a^2}{2M_p^2\,a}+V|U_0|\right],\sqrt{g_{00}}=\left(\dfrac{a}{a_0}\right)^3$ [5]. Для решения (1) нетрудно получить

$$W(\tilde{E},N,V)=\frac{1}{2\omega}\mathrm{Arsh}\left[\frac{V}{V_0}\sqrt{\frac{k_bT(0)\,N_0}{\tilde{E}}}\right],$$

здесь $V_0=\dfrac{4\pi a_0^3}{3}$. Подставляя в последнее выражение $V=\dfrac{4\pi a_0^3}{3}\cosh(\nu\,t)$, получим выражение, приближенно ($\tau<1$) описывающее эволюцию энтропии Больцмана ранней Вселенной,

$$S(\tau)=\ln\left[\mathrm{Arsh}\left(\cosh(\tau)\sqrt{\frac{kT(0)\,N_0}{\tilde{E}}}\right)\right]+S_0,$$

где ($\tau=\nu t$), а величина n^{-1} интерпретируется как возраст Вселенной. При этом для времен $\tau<1\ \dfrac{dS}{d\,t}\approx 0.$

Эволюция безразмерной энтропии Больцмана представлена на рис. 2.

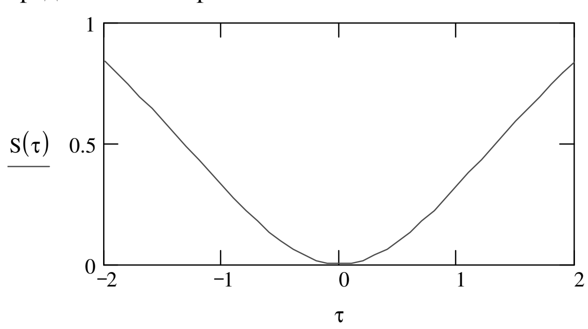


Рис. 2. *Зависимость безразмерной энтропии Больцмана от времени τ*

Из рис. 1 и 2 видно, что эволюция системы имеет смысл только при $t>0$ и энтропия из-за неустойчивости решения (1) может возрастать беспредельно с малым темпом возрастания. Отсутствие максимума энтропии обусловлено возрастанием объема V. Ограниченность энтропии может обеспечить скалярный потенциал вида

$$U(\varphi)=\begin{cases}U_0,\ t\le t_m\\0,\ t>t_m\end{cases}.$$

Момент времени t_m можно определить из условия $S(t_m)=1$. В этом случае $t_m\approx 1{,}8\nu^{-1}$, а параметр самодействия скалярного поля $\lambda=1$ и, следовательно, $N_0=1$. Из рис. 1 и 2 видно, что время релаксации нестационарного состояния $t_r\approx 2\nu^{-1}$.

Эволюция безразмерной энтропии отдельной частицы для распределения (8) представлена на третьем и четвертом рисунках, где $\tau=\nu t$, $\lambda=1{,}18$, $a_0=2H_0^{-1}$. Значение константы теории λ выбрано из условия $S(0)=0$, являющегося аналогом третьего закона термодинамики. Выбор начала отсчета времени $t_0=0$ обусловлен экстремумом решения ур. (4).

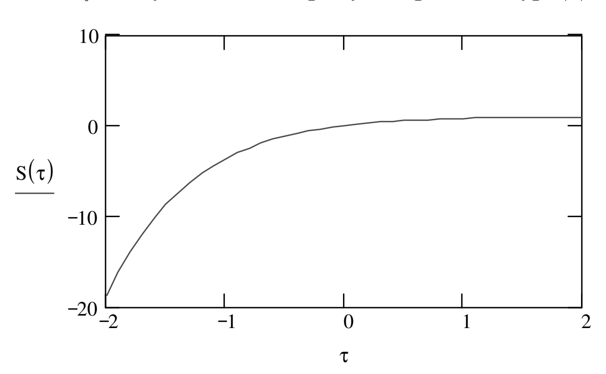


Рис. 3. *Зависимость безразмерной энтропии на одну частицу от времени τ=νt при γ=−1*

Из рис. 3 видно, что энтропия возрастает как при $\tau<0$, так и при $\tau>0$, но в первом случае $S<0$, а во втором случае $S>0$. Поэтому естественно предположить, что эволюция системы имеет смысл только при $t>0$.

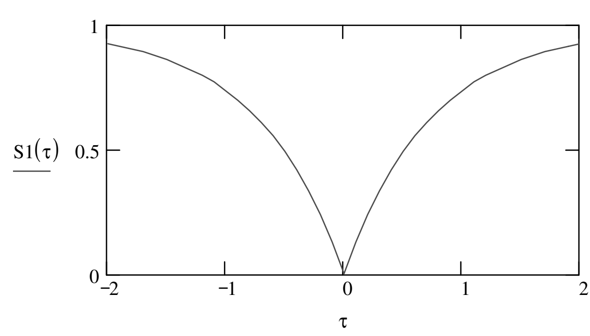


Рис. 4. *Зависимость безразмерной энтропии на одну частицу от времени τ=νt при γ=−sgn(t), $U_0<0$*

В заключение отметим, что для потенциала

$$U(\varphi)=\begin{cases}-U_0,\ 0\le t\le t_1\\ U_0,\ t_1<t\le t_2\\ 0,\ t>t_2\end{cases},$$

рассмотренные в статье случаи (U_0>0) и (U_0<0) можно рассматривать как этапы единого процесса эволюции ранней Вселенной.

Интересно отметить, что на линии постоянного уровня $\widetilde{H}_*(a,p)=E$ распределение (10) совпадает с вероятностью рождения Вселенной, найденной в работе [7].

Из (10) видно, что каноническое распределение Гиббса не является аналитичным по константе взаимодействия ω. Поэтому оно не может быть получено на основе теории возмущений. Функция распределения (10) больше там, где $|U_0|$ имеет большие значения. Если предположить, что $|U_0|$ является случайной величиной, то тогда функция распределения станет случайной функцией. По определению случайной функцией называют функцию неслучайного аргумента t, которая при каждом фиксированном значении аргумента является случайной величиной. Такие функции позволят описывать индетерминистические процессы, характерные для живой природы. Такой подход осуществлен в работе [8].

Отметим, что в соответствии с ур. (5) всегда полная производная $\frac{d\rho}{dt}=0$, а частная производная может отличаться от нуля. Поэтому для любого распределения, удовлетворяющего гравитационному аналогу ур. Лиувилля (5), полная производная информационной энтропии $\frac{dS}{dt}=0$, а $\frac{\partial S}{\partial t}\neq 0$. Частная производная определяет эволюцию энтропии в фиксированной точке фазового пространства, что может иметь место в процессе рождения Вселенной.

Заключение

1. Получено космологическое обобщение классического уравнения Лиувилля, и найдено точное его решение, описывающее релаксацию состояния гравитационного атома к его равновесному состоянию. Обнаружено, что детерминистическое уравнение может иметь частное решение с нарушенной симметрией во времени. Найдены решения, описывающие как обратимые, так и необратимые процессы. Все это может служить динамическим обоснованием необратимости.
2. Получено уравнение состояния гравитационного атома. Найден гравитационный аналог первого закона термодинамики.
3. Вычислена в аналитическом виде энтропия равновесного и численно нестационарного состояния гравитационного атома, безразмерная энтропия которого возрастает до тех пор, пока в состоянии равновесия не достигнет максимального значения, равного единице.
4. Рождение обычного вещества во Вселенной, либо мини-вселенных – событие, связанное с нарушающей симметрию во времени неустойчивостью гравитационного атома относительно спонтанных переходов. Гравитационные атомы могут быть той средой, которая породила обычное вещество Вселенной, либо мини-вселенные.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пригожин И. Современная термодинамика. – М.: Мир, 2002. – 461 с.
2. Пригожин И. Неравновесная статистическая механика. – М.: Мир, 1964. – 314 с.
3. Зубарев Д.Н., Морозов В.Г., Ренке Г. Статистическая механика неравновесных процессов. Т. 1. – М.: Физматлит, 2002. – 431 с.
4. Ласуков В.В. Атомная модель ранней Вселенной // Известия вузов. Физика. – 2003. – № 4. – С. 70–75.
5. Ласуков В.В. Вселенная в метрике Логунова // Известия вузов. Физика. – 2002. – № 2. – С. 39–41.
6. Де Гроот С.Р., Мазур П. Неравновесная термодинамика. – М.: Мир, 1964. – 432 с.
7. Ласуков В.В. Квантовое рождение Вселенной // Известия вузов. Физика. – 2002. – № 5. – С. 88–92.
8. Ласуков В.В. Спирали Вселенной // Известия вузов. Физика. – 2003. – № 9. – С. 89–92.